Egzamin — Funkcje Analityczne

07.02.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Udowodnij, że dla $a > 0$ zachodzi następująca równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a} \cdot \frac{\exp(\pi a) + \exp(-\pi a)}{\exp(\pi a) - \exp(-\pi a)} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Podpowiedź: Można skorzystać z twierdzenia o residuach.

Zadanie 2 (5 p.)

Uzasadnij, że wielomian $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ ma dokładnie dwa pierwiastki (uwzględniając krotności) w zbiorze $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 3 (15 p.)

Rozważmy funkcje

$$g(z) = \frac{z^2 + 2\cos(z) - 2}{e^z - z^2 - 1}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^5}, \quad z \neq 0.$$

(a) Uzasadnij, że funkcję g można przedłużyć do funkcji holomorficznej $\widetilde{g}$ w otoczeniu zera.

(b) Niech $\widetilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ będzie rozwinięciem funkcji $\widetilde{g}$ w szereg potęgowy w otoczeniu $z = 0$. Wyznacz współczynniki c_0, c_1, c_2, c_3, c_4.

Podpowiedź: Wygodniej będzie użyć rozwinięć Taylora.

(c) Wyznacz część główną funkcji f wokół zera, rodzaj osobliwości w zerze oraz residuum w zerze.

Zadanie 4 (10 p.)

Rozważmy szereg

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}.$$

(a) Dla każdego $N \in \mathbb{Z}_+$ rozważmy "ogon" powyższego szeregu

$$f_N(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}.$$

Uzasadnij, że szereg $f_N(z)$ definiuje funkcję holomorficzną na obszarze

$$\Omega_N = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > -N\}.$$

(b) Uzasadnij, że szereg f definiuje funkcję meromorficzną na $\mathbb{C}$ i wyznacz jej bieguny.

(c) Rozważmy funkcję meromorficzną

$$g(z) = f''(z) - f'(z) + 2f(z).$$

Dla $k \in \mathbb{Z}_+$ definiujemy ciąg liczb zespolonych

$$a_k = \int_{S(0,k+\frac{1}{2})} g(z)\ dz,$$

gdzie $S(0, k + \frac{1}{2})$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku zero i promieniu $k + \frac{1}{2}$. Wyznacz granicę $\lim_{k\to\infty} a_k$.